Регата

Младшая лига

Первый тур

1a. Даны 4 натуральных числа. В каждой тройке их сумма делится на среднее из них по величине. Докажите, что среди чисел есть равные.

(А. Шаповалов)

1g. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Точка L лежит на продолжении стороны AB за вершину A. Проведенная из L касательная к окружности пересекает сторону AC в точке K. Найдите $\angle KOL$, если $\angle BAC = 50°$.

(перелицовка задачи Соросовской олимпиады 1995 года.)

1c. За круглым столом сидели несколько лжецов и рыцарей. Первый сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на одного больше, чем рыцарей». Второй сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на два больше, чем рыцарей», и так далее вплоть до последнего. Сколько человек могло сидеть за столом?

(А. Шаповалов)

Второй тур

2a. Числа a, b, c различны, а прямые $y = a^2x + bc$, $y = b^2x + ac$ и $y = c^2x + ab$ проходят через одну точку. Докажите, что $a + b + c = 0$.

(А. Шаповалов по фольклорным мотивам)

2g. Из точки A_0 под углом в $7°$ проведены черный и красный лучи, после чего построена ломаная $A_0A_1 \dots A_{20}$ (возможно, самопересекающаяся, но все вершины различны), у которой все звенья имеют длину 1, все четные вершины лежат на черном луче, а нечетные — на красном. Вершина с каким номером наиболее удалена от вершины A_0?

(старый конкурс «Кенгуру»)

2c. 5 аборигенов хотят переправиться в двухместной лодке через реку Лимпопо. Изначально каждый о ком-нибудь из остальных слышал слух, что тот — вирусоноситель лихорадки Эболы, и о каждом кто-то из остальных такое слышал. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не сядет. На берегах аборигены не разговаривают, зато в лодке обмениваются всеми известными им слухами. Могло ли случиться, что все они таки смогли переправиться?

(А. Шаповалов)

Третий тур

3a. На столе стоит 17 стаканов компота, наполненных в разной степени. Общий объем сухофруктов составляет 10% от всего компота. Петя и Вася выбирают и выпивают стаканы по очереди (начинает Петя), пока не выпьют всё. Докажите, что Петя всегда может добиться, чтобы в выпитом им компоте доля сухофруктов отличалась от 10% не больше, чем доля сухофруктов у Васи.

(А. Шаповалов)

3g. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны и пересекают диагональ BD в двух различных точках P и Q, при этом $BP = DQ$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

(А. Шаповалов)

3c. Несколько ладей побили все белые клетки шахматной доски 40×40. Какое наибольшее число черных клеток могли остаться не побитыми? (Ладья бьет клетку, на которой стоит.)

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

4a. На доске написано 100 различных целых чисел. Каждое число Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб и записал получившиеся 100 чисел на второй доске. Затем Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб каждое из чисел на второй доске (каждый раз выбирая степень наугад) и записывал результаты на третьей доске. Какое наименьшее количество различных чисел могло быть записано на третьей доске?

(А. Шаповалов по мотивам дополнительной задачи «Кенгуру-2014»)

4g. Бумажный прямоугольник $ABCD$ ($AB = 3$, $BC = 9$) перегнули так, что вершины A и C совпали. Какова площадь получившегося пятиугольника?

(дополнительные задачи «Кенгуру-2014»)

4c. Назовем девятизначное число *хорошим*, если в нем можно переставить одну цифру на *другое* место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по возрастанию. Сколько всего хороших чисел?

(А. Шаповалов)

Старшая лига

Первый тур

1a. Числа a и b таковы, что графики $y = ax - b$ и $y = x^2 + ax + b$ ограничивают конечную фигуру ненулевой площади. Докажите, что внутри этой фигуры лежит начало координат.

(А. Шаповалов)

1g. Все вершины правильного многоугольника лежат на поверхности куба, но его плоскость не совпадает ни с одной из плоскостей граней. Какое наибольшее количество вершин может быть у этого многоугольника?

(А. Шаповалов)

1c. Можно ли клетчатый прямоугольник 12345×6789 разбить по границам клеток на 7890 прямоугольников с одинаковыми диагоналями?

(А. Шаповалов)

Второй тур

2a. Произведение всех натуральных делителей натурального числа n (включая n) оканчивается на 120 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число n? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

(по мотивам «Кенгуру-2013»)

2g. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Оказалось, что $\angle BDC$ равен $60°$. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и CBD касаются стороны BD в одной точке и найдите отношение радиусов этих окружностей.

(М. Волчкевич)

2c. 100 аборигенов смогли переправиться в двухместной лодке с левого берега Лимпопо на правый. Изначально каждый об одном или нескольких из остальных слышал слух, что они — вирусоносители лихорадки Эболы. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не садился. На левом берегу распространение слухов запрещено, зато достигнув правого берега, аборигены высаживаются, все обмениваются всеми слухами, и только потом лодка возвращается. О каком наименьшем числе аборигенов могло совсем не быть слухов, что они — вирусоносители?

(А. Шаповалов)

Третий тур

3a. Барон Мюнхгаузен выписал на доску 10 слагаемых, а их сумму записал на листок. За одну операцию он заменял одно или несколько слагаемых на доске на обратные величины, и снова выписывал сумму на листок. Мог ли он в результате 500 таких операций выписать на листок числа $1, 2, \ldots, 500$?

(А. Шаповалов)

3g. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) выбрали такую точку N, что $2\angle ANB = 180° + \angle ACB$. Прямая, проходящая через точку C и параллельная AN, пересекает прямую BN в точке D. Биссектрисы углов CAN и ABN пересекаются в точке P. Докажите, что прямые DP и AN перпендикулярны.

(Middle European 2013)

3c. При любой раскраске клеток клетчатой доски в черный и белый цвета доска делится на одноцветные области (при шахматной раскраске все области — одноклеточные). Каждым ходом Петя выбирает одну область и перекрашивает её в противоположный цвет. Перекрашенная область склеивается в одну с соседними областями того же цвета, и число областей уменьшается. За какое наименьшее число ходов Петя сможет из шахматно раскрашенной доски 13×13 сделать одноцветную доску?

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

4a. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех действительных x удовлетворяют соотношениям

$$\underbrace{f(f(f\ldots f}_{13}(x)\ldots)) = -x, \qquad \underbrace{f(f(f\ldots f}_{8}(x)\ldots)) = x\,.$$

(А. Устинов)

4g. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в точке P внутри треугольника ABC. Точки O_1, O_2 и O_3 — центры этих окружностей. Докажите, что $4S(O_1O_2O_3) \geqslant S(ABC)$.

(А. Смирнов по мотивам Macedonia 2014.)

4c. Докажите, что число способов раскрасить ребра n-угольной призмы в 4 данных цвета так, чтобы на ребрах каждой грани встречались все цвета, не превосходит $8 \cdot 6^{n-1} - 12 \cdot 2^{n-1}$.

(А. Шаповалов)